計算力学理論ハンドブック

【監訳】

田端 正久 （九州大学大学院数理学研究院）
萩原 一郎 （東京工業大学大学院理工学研究科）

●理論、実験に続く第3の科学技術領域となった計算力学基礎理論の全貌を明らかにする初のエンサイクロペディア

●計算力学、計算工学、計算物理学、計算科学、数理科学に携わる技術者・研究者必携の書

B5判　736頁　函入上製本
定価33,600円(本体32,000円)
ISBN 978-4-254-23120-5 C3053

朝倉書店

監訳者

田端　正久　九州大学大学院数理学研究院教授

萩原　一郎　東京工業大学大学院理工学研究科教授

翻訳者（翻訳順）

萩原　一郎　東京工業大学
中木　達幸　広島大学
友枝　謙二　大阪工業大学
小山　大介　電気通信大学
水谷　明　学習院大学
木村　正人　九州大学
大森　克史　富山大学
今井　仁司　徳島大学
山田　道夫　京都大学
榊原　進　元 東京電機大学
芦野　隆一　大阪教育大学
佐々木文夫　東京理科大学
海津　聰　前 茨城大学
田端　正久　九州大学
田上　大助　九州大学
野口　裕久　元 慶應義塾大学
都井　裕　東京大学
松本　敏郎　名古屋大学
天谷　賢治　東京工業大学
速水　謙　国立情報学研究所
大西　和榮　茨城大学
山田　貴博　横浜国立大学
相曽　秀昭　宇宙航空研究開発機構
嶋　英志　宇宙航空研究開発機構
田辺　誠　神奈川工科大学
川村　恭己　横浜国立大学
篠田　淳一　(株)インターローカス
藤代　一成　慶應義塾大学
茅　暁陽　山梨大学
櫻井　鉄也　筑波大学
西村　直志　京都大学
塩谷　隆二　東洋大学
鈴木　厚　九州大学
藤間　晶一　茨城大学
土屋　卓也　愛媛大学
齊藤　宣一　東京大学
瀬戸　秀幸　防衛大学校
金山　寛　九州大学

内容目次

1 基本：序論と概観
1.1 動機と目的
1.2 計算力学の開発段階と特色
1.3 各章の展望
1.4 われわれは何を期待するか
2 有限差分法
2.1 はじめに
2.2 2点境界値問題
2.3 楕円型問題に対する有限差分法
2.4 放物問題に対する有限差分法
2.5 双曲問題に対する有限差分法
2.6 移流拡散問題
2.7 差分スキームの要約
3 h型有限要素空間における補間
3.1 はじめに
3.2 有限要素
3.3 補間作用素の定義
3.4 Deny-Lionsの補題
3.5 節点補間に対する局所的誤差評価
3.6 準補間に対する局所的誤差評価
3.7 大域的補間誤差評価の例
4 有限要素法
4.1 はじめに
4.2 線形楕円型境界値問題に対する Ritz-Galerkin法
4.3 有限要素空間
4.4 有限要素法の事前誤差評価
4.5 事後誤差評価と解析
4.6 局所的メッシュ細分割
4.7 その他の諸問題
5 p型有限要素法
5.1 はじめに
5.2 実装
5.3 収束特性
5.4 実行性能
5.5 非線形問題への応用
5.6 展望
6 スペクトル法
6.1 はじめに
6.2 Fourierの方法
6.3 代数多項式展開
6.4 三角関数に関する代数的展開
6.5 StokesとNavier-Stokes方程式
6.6 移流方程式と保存則
6.7 スペクトル要素法
6.8 モルタル法
7 数値シミュレーションにおける適合ウェーブレット法
7.1 はじめに
7.2 ウェーブレット
7.3 発展問題－流れ場の圧縮
7.4 境界積分方程式－行列圧縮
7.5 新しい適合パラダイム
7.6 剰余近似の構成と計算量の解析
8 薄板、シェル：漸近展開と階層モデル
8.1 はじめに
8.2 薄板に対するマルチスケール展開
8.3 平板階層モデル
8.4 シェルに対するマルチスケール展開と極限モデル
8.5 シェルの階層モデル
8.6 薄い領域における有限要素法
9 混合型有限要素法
9.1 はじめに
9.2 定式化
9.3 有限次元鞍点問題の安定性
9.4 応用
9.5 下限上限条件証明のための技術
10 メッシュフリー法
10.1 はじめに
10.2 メッシュフリー法における近似
10.3 偏微分方程式の離散化
10.4 Radial Basis Function
10.5 不連続性
10.6 メッシュフリー法と有限要素法のブレンディング
11 離散要素法
11.1 はじめに
11.2 離散要素法の基礎と非平滑接触条件の正規化
11.3 相互作用物体の特徴づけおよび接触探索
11.4 接触拘束と境界条件の付与
11.5 ブロックの変形性のモデリング
11.6 離散要素法における連続/不連続遷移, 破砕
11.7 時間積分－時間の離散化, エネルギー平衡, および離散要素の実行
11.8 関連手法と発展
12 境界要素法－その基礎と誤差解析－
12.1 はじめに
12.2 境界積分方程式
12.3 変分形式
12.4 Galerkin境界要素法
12.5 Sobolev指標の役割
12.6 結論
13 境界要素法と有限要素法の結合
13.1 はじめに
13.2 標準的な有限要素法と境界要素法の対称結合解法
13.3 hp版有限要素・境界要素の高速結合解法
13.4 最小2乗有限要素・境界要素結合解法
13.5 Signorini接触界面問題のFE/BE接合解法
13.6 応用
13.7 結論と注意
14 ALE法
14.1 はじめに
14.2 運動の記述
14.3 基本的なALE方程式
14.4 保存方程式のALE形式
14.5 メッシュ更新手法
14.6 流体力学におけるALE法
14.7 非線形固体力学におけるALE法
15 有限体積法：その基礎と応用
15.1 はじめに：スカラー非線形保存則
15.2 非線形保存則のための有限体積法
15.3 高次精度有限体積法の一般化
15.4 より進んだいくつかの事項
15.5 まとめ
16 複雑形状と工学製品の幾何学的モデリング
16.1 モデリングシステムのアーキテクチャ
16.2 ボクセル表現
16.3 サーフェスパッチ
16.4 境界表現
16.5 CSG
16.6 ミディアルモデリング
16.7 属性
16.8 展望と結論
17 メッシュ生成とメッシュの順応
17.1 はじめに
17.2 メッシュ生成の歴史
17.3 メッシュ生成手法
17.4 質を考慮したメッシュ生成とメッシュの順応
17.5 順応型FEM解析
17.6 大規模問題, 並列化と順応化
17.7 移動境界問題に対するメッシュ分割
17.8 適用事例
18 可視化
18.1 はじめに
18.2 データ形
18.3 可視化アルゴリズム
18.4 ボリュームレンダリング
18.5 大規模データ可視化の方法
18.6 データ可視化システムの分類
18.7 計算システムと可視化システムのインタフェース
19 線形方程式の解法と固有値解析
19.1 はじめに
19.2 数学的な基礎
19.3 線形方程式の直接解法
19.4 前処理
19.5 不完全LU分解
19.6 固有値問題の全固有値解法
19.7 固有値問題の反復解法
20 有限要素法と境界要素法のための多重格子法
20.1 多重格子法に関する一般的注意
20.2 2グリッド反復
20.3 多重格子法
20.4 有限要素法への応用
20.5 加法的多重格子法
20.6 入れ子反復
20.7 非線形方程式
20.8 固有値問題
20.9 境界要素法への応用
21 BEMとFEMのためのパネルクラスタリング法と階層型行列
21.1 はじめに
21.2 パネルクラスタリング法（Ver.1）
21.3 パネルクラスタリング法（Ver.2）
21.4 階層型行列
22 領域分割法と前処理
22.1 はじめに
22.2 領域分割法の歴史
22.3 Schwarz法の基礎
22.4 重なりあり領域分割法
22.5 重なりなし領域分割法
23 非線形システムと分岐
23.1 はじめに
23.2 一般的な反復プロセス
23.3 いくつかの反復法
23.4 パラメータつきシステム
23.5 分岐
24 放物型問題に対するアダプティブ法
24.1 放物型問題とは
24.2 概要
24.3 文献
24.4 初期値問題に対するアダプティブ法の入門
24.5 硬い問題の例
24.6 硬くない問題：Lorenz系
24.7 硬い問題に対する陽的な時間離散化
24.8 抽象的放物型問題に対する強安定性評価
24.9 熱方程式に対するアダプティブ Galerkin法
24.10 熱方程式に対する事前・事後誤差評価
24.11 アダプティブ法/アルゴリズム
24.12 信頼性と効率性
24.13 熱方程式に対する強安定性評価
24.14 L_2射影と楕円型射影に対する事前評価
24.15 事前誤差評価の証明
24.16 事後誤差評価の証明
24.17 移流拡散反応系への拡張
24.18 反応拡散系の例
24.19 常微分方程式の時間刻み幅制御に対する標準的手法との比較
24.20 ソフトウエア
25 時間依存型の問題と境界積分方程式法
25.1 はじめに
25.2 時間-空間領域での積分方程式
25.3 Laplace変換法
25.4 時間刻み法
26 Maxwell方程式に対する有限要素法
26.1 Maxwell方程式
26.2 変分法的定式化
26.3 完全系列
26.4 射影に基づく補間：De Rham図式
26.5 補足注釈

本文組見本　(93%縮小)

注意 4.16　一般の三角形や四角形 C^1 マクロ要素の解析は Douglas *et al.* (1979) にみられる．

板曲げ問題は Argyris 要素（例 4.5 参照）によっても離散化できる．すべての $D \in \mathcal{D}$ に対して $\alpha(D) > 1$ ならば，節点補間作用素 $\Pi_{\mathcal{T}}^N$ は Argysis 有限要素空間に対して定義可能である．ある $D \in \mathcal{T}$ に対して $\alpha(D) \le 1$ の場合は，節点補間作用素 $\Pi_{\mathcal{T}}^N$ は局所平均化の手法により構成される補間作用素に置き換えなければならない．いずれの場合も，評価 (4.65)–(4.67) は Argyris 有限要素空間に対して有効である．

4.5　事後誤差評価と解析

この節では，事後有限要素誤差制御を行うために平均化推定量や多重推定量だけでなく明示的推定量や陰的推定量を復習する．

この節を通して，4.2.1 項と 4.2.2 項の記号を採用する．u は式 (4.1) の（未知の）真の解を表し，$\tilde{u} \in \widetilde{V}$ は式 (4.19) の与えられた離散解を表す．4.5.1-4.5.6 項の目的は，誤差 $e := u - \tilde{u} \in V$ のエネルギーノルム $\|\cdot\|_a = (a(\cdot,\cdot))^{1/2}$ を計算可能な量で評価することである．4.5.7 項ではほかの誤差ノルムや目的汎関数を扱う．

この節を通して，$0 < \|e\|_a$ と仮定し，$u = \tilde{u}$ という例外的な状況は考慮に入れない．

4.5.1　事後有限要素誤差制御の目的と概念

これからの項で，記号，有効性と信頼性の概念，残差と誤差の定義，事後誤差制御，アダプティブアルゴリズムを紹介する．また，いくつか関連のある文献を示す．

4.5.1.1　誤差推定量，有効性，信頼性，漸近的正しさ

（未知の）誤差ノルム $\|e\|_a$ の近似と見なされる（計算可能な）量 η は**事後誤差推定量**（*a posteriori* error estimator）または短く**推定量**（estimator）という．その量 η は，（与えられた）離散解 $\tilde{u}$ や基礎となる三角分割はもちろん，既知の領域 Ω とその境界 Γ や右辺 F についてのいくつかの量（式 (4.6)，(4.13) を参照）により定まる．

推定量 η は

$$\|e\|_a \le \mathrm{C_{rel}}\,\eta + \mathrm{h.o.t._{rel}} \tag{4.68}$$

が成り立つとき**信頼できる**（reliable）という．

推定量 η は

$$\eta \le \mathrm{C_{eff}}\,\|e\|_a + \mathrm{h.o.t._{eff}} \tag{4.69}$$

が成り立つとき**有効である**（efficient）という．

推定量が，$\mathrm{C_{rel}} = \mathrm{C_{eff}^{-1}}$ で式 (4.68)–(4.69) の意味で信頼できかつ有効であるとき**漸近的に正しい**（asymptotically exact）という．

ここで，$\mathrm{C_{rel}}$ と $\mathrm{C_{eff}}$ は，$\tilde{u}$ の計算で基礎となる有限要素メッシュ $\mathcal{T}$ のメッシュサイズによらない乗法定数で，h.o.t. は高次の項を表す．後者は一般には η や $\|e\|_a$ よりはるかに小さい．しかし，通常，真の解の（未知の）滑らかさや与えられたデータの（既知の）滑らかさに依存している．読者は，一般に，h.o.t. は無視できないことに注意してほしい．高振幅の場合には，高次項が式 (4.68) や式 (4.69) を支配することもある．

4.5.1.2　誤差と残差

推定量の抽象的な例は式 (4.26) と式 (4.27) であり，それらは残差 (4.25) の双対ノルムを含む．$R := F - a(\tilde{u},\cdot)$ は V 上の有界線形汎関数（$R \in V^*$ と書く）であることに注意せよ．その双対ノルムは

$$\|R\|_{V^*} := \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{R(v)}{\|v\|_a} = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{a(e,v)}{\|v\|_a} = \|e\|_a < \infty \tag{4.70}$$

となる．2 番目の等式は式 (4.25) から直接成り立つ．式 (4.70) で内積 a について Cauchy の不等式を適用すると $\|R\|_{V^*} \le \|e\|_a$ となり，また，式 (4.70) で $v = e$ とおくと最終的に $\|R\|_{V^*} = \|e\|_a$ が得られる．

すなわち，エネルギーノルムでの誤差（評価）は与えられた残差の双対ノルム（の計算）と**同等**（equivalent）である．さらに，これは式 (4.70) で最適な $v = e$ を計算したり e を求めたりすることと**同等な計算努力を要する**ものである．式 (4.70) の証明から安定評価も得られる．$\|e\|_a$ の近似としての $R(v)$ の相対誤差は

$$\frac{(\|e\|_a - R(v))}{\|e\|_a} = \frac{1}{2}\left\|v - \frac{e}{\|e\|_a}\right\|_a^2$$
$$(\|v\|_a = 1 \text{ をみたすすべての } v \in V \text{ に対して}) \tag{4.71}$$

に等しい．実際，$\|v\|_a = 1$ をみたす任意の $v \in V$ が与えられたとき，等式 (4.71) は

$$1 - a\left(\frac{e}{\|e\|_a}, v\right) = \frac{1}{2}a\left(\frac{e}{\|e\|_a}, \frac{e}{\|e\|_a}\right) - a\left(\frac{e}{\|e\|_a}, v\right)$$
$$\frac{1}{2}a(v,v) = \frac{1}{2}\left\|v - \frac{e}{\|e\|_a}\right\|_a^2$$

より成り立つ．誤差評価 (4.71) から (4.70) を最大にする v（つまり，$\|v\|_a \le 1$ のもとで $R(v)$ を最大にする $v \in V$）は一意的で $e/\|e\|_a$ に等しいことがわかる．その結果，式 (4.70) を最大にする v を計算することは未知の $e/\|e\|_a$，したがって（$\tilde{u}$ が既知より）真の解 u を計算することと同等で，実際同様な労力のかかること

本文組見本

$$|I| \le C \sum_{n=1}^{N} \|h_n^2 D_n^2 U\|_{I_n} \|\Delta \int_{I_n} \phi\, \mathrm{d}t\|$$

$$\le C \max_{1\le n\le N} \|h_n^2 D_n^2(U)\|_{I_n} \left(\int_0^{t_{N-1}} \|\dot{\phi}\|\, \mathrm{d}t + 2\|\phi\|_{I_N}\right) \quad (24.70)$$

を得る．次に，II を評価するために，補題 24.4 により，

$$\left|([U]_{n-1}, (P_n - I)\phi^+_{n-1})\right| \le C\|h_n^2[U]_{n-1}\|^* \|\Delta\phi^+_{n-1}\| \quad (24.71)$$

が成立することに注意する．もし，$S_{n-1} \subset S_n$ ならば左辺は 0 である．I_n 上で定義された定数関数全体への $L_2(I_n)$ 射影の安定性・近似能力により，

$$\|\tilde{\phi} - P_n\phi\|_{I_n} \le \|P_n\phi\|_{I_n} \le \|\phi\|_{I_n} \quad (24.72)$$

と

$$\|\tilde{\phi} - P_n\phi\|_{I_n} \le \int_{I_n} \|P_n\dot{\phi}\|\ \mathrm{d}t \le \int_{I_n} \|\dot{\phi}\|\ \mathrm{d}t \quad (24.73)$$

を得る．すなわち，

$$|II| \le C \max_{1\le n\le N} \left\|\frac{h_n^2[U]_{n-1}}{k_n}\right\|^* \sum_{n=1}^{N} k_n \|\Delta\phi^+_{n-1}\|$$

$$+ \max_{1\le n\le N} \|[U]_{n-1}\| \left(\int_0^{t_{N-1}} \|\dot{\phi}\|\, \mathrm{d}t + \|\phi\|_{I_N}\right) \quad (24.74)$$

を結論できる．最後の項 III の評価も同様である．最後に，ϕ の強安定性

$$\sum_{n=1}^{N-1} k_n \|w^+_{n-1}\| \le \int_0^{t_{N-1}} \|w\|\, \mathrm{d}t$$

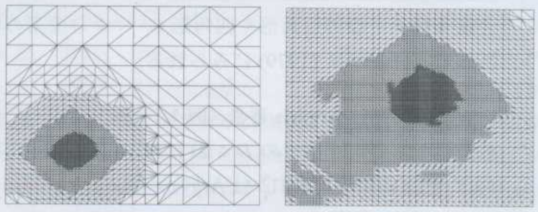

図 24.10　移動熱源問題に対する空間メッシュ

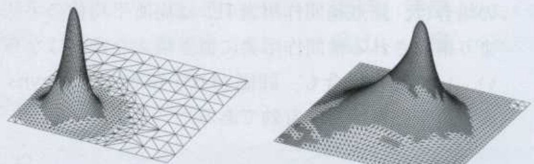

図 24.11　移動熱源問題の解

は濃度ベクトル，$a = a(x, t)$ は拡散係数からなる対角行列，$b = b(x, t)$ は移流速度，$f(u)$ は反応モデルを表す．また，$\partial_n = n \cdot \nabla$ であり，n は Γ の外向き単位法線を表す．放物性の挙動は，対応する線形化双対問題（線形化は厳密解 u に対して行う）

$$\begin{cases} -\dot{\phi} - \nabla\cdot(a\nabla\phi) - \nabla\cdot(\phi b) & (\Omega\times[0,T)\ 内) \\ \quad -(f'(u))^{\top}\phi = 0 & \\ \partial_n\phi = 0 & (\Gamma\times[0,T)\ 上) \\ \phi(\cdot, T) = \psi & (\Omega\ 内) \end{cases} \quad (24.77)$$

の安定性係数の大きさによって決定されるが，それは係数 a，b や反応項の大きさに左右される．ただし，$(\nabla\cdot(\phi b))_i \equiv \nabla\cdot(\phi b_i)$ $(i = 1, \ldots, d)$ と表している．

読者対象

- ●科学技術計算に携わる機械系をはじめとする理工系全般の学生から大学院生
- ●製造業の技術開発者・研究者
- ●大学・企業・研究所および公共図書館

［2010年2月刊］

きりとり線

【お申し込み書】この申し込み書にご記入のうえ、最寄りの書店にご注文下さい。

計算力学理論ハンドブック

B5判　736頁　定価33,600円（本体32,000円）

ISBN 978-4-254-23120-5 C3053

冊

取扱書店

●お名前　□公費／□私費

●ご住所（〒　　　）TEL

朝倉書店

〒162-8707　東京都新宿区新小川町6-29／振替00160-9-8673

電話 03-3260-7631／FAX 03-3260-0180

http://www.asakura.co.jp　eigyo@asakura.co.jp